【中学校数学】事例３

図形の性質に対する柔軟な見方や考え方を深める授業

― 第２学年「三角形の性質」を通して ―

１　主題設定の理由

(1) ３年次研究から

昨年度は、次の証明問題について４つの調査をした。

> ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形ＡＢＣがある。ＡＢ、ＡＣ上にそれぞれ点Ｄ、ＥをＢＤ＝ＣＥとなるようにとり、ＢとＥ、ＣとＤを結ぶ。
> このとき、ＢＥ＝ＣＤであることを証明せよ。

仮定、定義、性質、結論についての理解状況を分析するため、調査の１つに「この証明問題の仮定と結論を右のア～オからすべて選びなさい。」という問いがあった。

> ア　ＡＢ＝ＡＣ
> イ　∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ
> ウ　ＢＤ＝ＣＥ
> エ　ＡＤ＝ＡＥ
> オ　ＢＥ＝ＣＤ

結論の正答率は75％であったが、仮定を正しく指摘できた生徒は13％であった。仮定の誤答例としては、仮定から導かれる性質（イ、エ）も挙げた生徒が全体の49％を占めていた。仮定、定義、性質の意味を理解していない生徒が半数を占めている実態を直視しなければならない。

次に、仮定の一部を変えたらどうなるか、ほかに成り立つ性質はないかなど、証明問題を発展的に考察することへの関心・意欲・態度を調べた。

『問題文の下線　の一部分を変えて、「ＡＢ、ＡＣの延長上」にそれぞれ点Ｄ、ＥをＢＤ＝ＣＥとなるようにとったとき、ＢＥ＝ＣＤが成り立つか調べてみたい。』という選択肢を選んだ生徒は16％、『問題文の下線　はそのままにして、「ＢＥ＝ＣＤ」以外に成り立つ性質はないか調べてみたい。』を選択した生徒は29％、『これら以外について調べてみたい』という生徒は14％であった。また『調べてみたいと思わない』生徒は38％であった。調べてみたいと思わない生徒のおよそ半数の生徒は、『難しそうだと思ったから』という理由を選んでいた。過半数の生徒は証明問題の発展的考察に関心をもっていたが、約４割の生徒は否定的であった。

(2) オープンな問題を扱ったときの問題点から

オープンな問題で授業を展開するとき、２つの問題点を感じている。１つは、オー

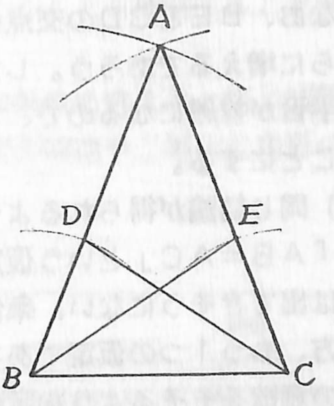
プンな問題に対して生徒はさまざまな性質やきまりを見付けるが、授業者の期待していない性質やきまりは、ややもすると授業に取り上げられない傾向がある。これでは、いろいろな性質などを見付けた生徒の学習意欲を半減させてしまうことになる。

もう１つは、さまざまな性質やきまりの関連をどのように図って、どのように学習のまとめをするかということである。

２　授業改善の視点

(1) 条件に合った図を生徒自身がかく過程の重視

昨年度の調査では、仮定、定義、性質の意味を理解していない生徒が半数を占めていた。そこで、問題を把握する段階では、問題文を正しく読み取り、問題文に適した図を生徒自身がかく場を設定する。



この問題の場合は、二等辺三角形ＡＢＣの底辺である辺ＢＣだけをかいた図を示し、生徒がコンパスと定規を使って二等辺三角形ＡＢＣを作図した後、再びコンパスを使って点Ｄ、Ｅの位置を決め、ＢとＥ、ＣとＤをそれぞれ結ぶようにする。そして、図の中の仮定を示す部分には「＝」の印を付けるように指示する。個々の生徒の作図に使ったコンパスの跡と、書き込まれた「＝」の印を見て、仮定、定義、性質の区別がついているかどうかを把握したい。特に、点Ｄ、Ｅのとり方では、コンパスの軌跡に注目したい。

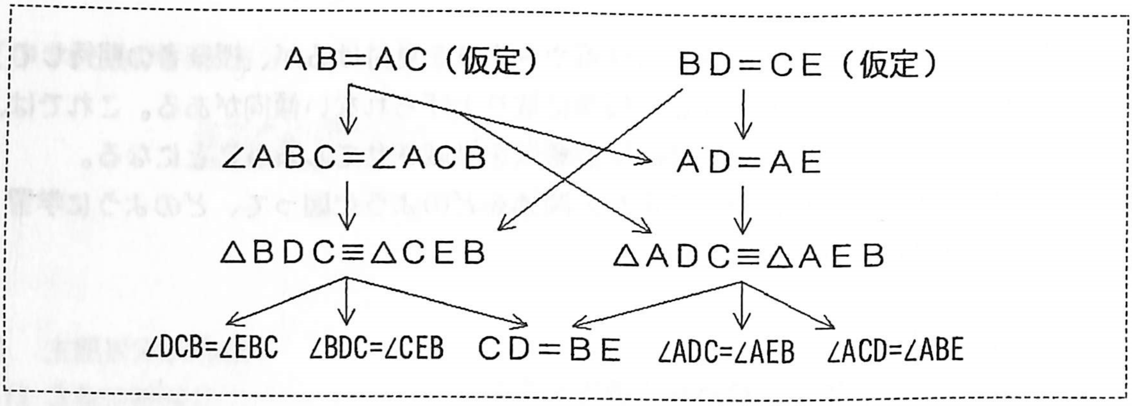
(2) オープンな問題場面の提示とその後の展開

授業の導入において、問題の解決に必要な情報を一方的に与え過ぎると、生徒の主体的に問題を把握する活動が不十分になり、問題意識や意欲が喚起されないまま学習活動が進展する場合がある。特に論証問題では、結論を示して「～であることを証明せよ。」といった提示は、生徒の学習意欲の喚起につながらない。

そこで、できるだけオープンな問題場面を提示し、それぞれの生徒が進んで学習にかかわれるような場を十分に保障したい。

この問題の場合には結論の１つである「ＢＥ＝ＣＤ」を示さずに、「約束していないのに、新たに成り立ちそうなことを見付けよう」と問いかけ、生徒自身の言葉で気付きを表現する活動を重視したい。

さらに、生徒が見付ける性質（次の図の中の仮定以外の９つの性質）はすべて取り上げ、それぞれの性質の関係を考察する学習を位置付けて、論証の筋道を考える学習にしたい。



証明の順番はこれ以外にも考えられるが、生徒の混乱をまねくおそれがあるので、この方向で進めていきたい。そして、生徒とのやりとりの中で、「ＣＤ＝ＢＥ」に焦点を当てて、このことを結論とする論証を試みることにする。

なお、ＢＥとＣＤの交点に記号（例えばＦ）を付けると、生徒が見付け出す性質はさらに増えるであろう。しかし、そのためにかえってそれぞれの性質の関連を考察する学習が複雑になるので、この問題ではＢＥとＣＤの交点に記号を付けることはしないことにする。

(3) 同じ結論が得られるような仮定を考察する発展的な学習

「ＡＢ＝ＡＣ」という仮定を変更して「ＡＢ≠ＡＣ」としても、特段おもしろい性質は出てきそうにない。条件変更の意義やよさを感得できるようにすることは難しい。一方、もう１つの仮定である「ＢＤ＝ＣＥ」を否定して「ＢＤ≠ＣＥ」としても、生徒の意欲をそそるような学習の展開はできそうにない。

また、仮定を変えるとそれに伴って結論も変わることが多い。仮定の変更と同時に結論としてどんなことが言えそうかということまで考えることは、論証の学習のスタート段階にある２年生にとっては、やっかいな問題になるに違いない。

このような考えから、この問題の発展的考察としては、「ＡＢ＝ＡＣ」という仮定はそのままにしておき、もう１つの仮定である「ＢＤ＝ＣＥ」の代わりにどのような条件を考えると、同じ結論「ＣＤ＝ＢＥ」が得られるかを考察することにしたい。このとき、点D、Eのとり方を、最初は「ＡＢ、ＡC上」と限定し、続いて「ＡＢ、ＡC上でなくてもよい」と広げ、見通しをもって取り組めるようにしたい。

生徒はこれまでの学習の中で、補助線をひくことを経験している。これらの経験を生かしてさまざまな条件を考え、どの場合にも同じ結論「ＣＤ＝ＢＥ」が得られるのかという疑問をもち、前向きに学習に取り組むものと考える。

結果のまとめでは、同じ結論を導く仮定は何通りかあり、仮定同士も関連し合っている場合が多いことと、いろいろな仮定から同じ結論が導けるのは、結局のところ、

基の三角形が二等辺三角形であり、二等辺三角形のもつ対称性に起因していることに生徒が気付くようにしたい。

3　本時の学習

(1) 単元における位置付け

1次　二等辺三角形…２時間
2次　三角形の性質…３時間（本時）
3次　正三角形　　…１時間

(2) 本時のねらい

○オープンな課題に対していろいろな性質を見付け、それらの性質の関係を調べて、証明の筋道を考える。
○見付けた性質の中から「ＣＤ＝ＢＥ」に焦点を当てて、このことを証明することができる。
○仮定の１つである「ＢＤ＝ＣＥ」の代わりに、どのような条件を考えると同じ結論「ＣＤ＝ＢＥ」が得られるかを考察し、新たに考えた仮定の関連や二等辺三角形の対称性に気付く。

(3) 展開の構想

段階	学習活動・内容	教師の支援	評価
問題の把握	○前時に学習した二等辺三角形の定義と性質を確認する。	○問題を把握する段階で少しでも困難さを感じさせないために、問題を提示する前に、復習として二等辺三角形の定義と性質について問うことにする。	○二等辺三角形の定義と性質の区別がつく。 （知・理　発言）
	ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形ＡＢＣがある。ＡＢ、ＡＣ上にそれぞれ点Ｄ、ＥをＢＤ＝ＣＥとなるようにとり、ＢとＥ、ＣとＤを結ぶ。（図は、底辺ＢＣだけをかいたものを提示する。）		
	○題意に合った図を作図するために、頂点Ａを求め、ＢとＡ、ＣとＡを結び、コンパスを用いて点Ｄ、Ｅの位置を求める。 ○仮定を書き出す。 ○図中の仮定に当たる部分に「＝」の印を書き入れる。 ○新たに成り立ちそうなこととして、幾つかの性質を書き出す。 ∠ＡＤＣ＝∠ＡＥＢ　∠ＢＤＣ＝∠ＣＥＢ ∠ＡＢＥ＝∠ＡＣＤ　∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ ∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ　ＡＤ＝ＡＥ △ＡＤＣ≡△ＡＥＢ　△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ ＢＥ＝ＣＤ	○図をかき上げ、仮定を表す部分には「＝」の印を書き入れるように指示する。 ○個々の生徒の図に注目し、次のことを把握する。 ・頂点Ａの位置は正しいか ・点Ｄ、Ｅのとり方は正しいか ・仮定を正しく把握し、印「＝」を入れているか ○「約束していないのに、新たに成り立ちそうなことは何か」と問う。 ○オープンな課題に不慣れな生徒なので、必要に応じて、意味を理解している生徒の解答を例示したり、辺や角、合同といった視点を示唆したりする。	○題意に合った図を完成することができる。 （知・理　ノート） ○仮定を把握している。 （知・理　ノート） ○新たに成り立ちそうな性質を見つけようとする。 （関・意　ノート）

段階	学習活動・内容	教師の支援	評価
問題の解決	o見付けた性質をカードに書いて、黒板に掲示する。 o仮定からすぐに言えそうなものは、AD＝AEと∠ABC＝∠ACBであり、三角形の合同を利用して導くものは、4組の角とBE＝CDであることに気付く。 o仮定からすぐに言えそうなことと、三角形の合同から導かれる性質を区別しながら、証明の筋道を考え、黒板のカード（性質を書いたもの）の位置を決める。 oBE＝CDを結論とする証明を、△ADC≡△AEBか△BDC≡△CEBのどちらかを選択して試みる。 o改めて証明の構想を立て、記述を試みる。 ・3辺相等の条件は使えない　・1辺と両端の角相等の条件も使えない　・仮定から成り立つことを確認する　・記述できるところまで書いてみる oペアになった生徒同士で、証明の発表と修正を行う。 o指名された生徒は証明を発表し、他の生徒は試みなかった証明に注意深く聞き入る。	oカードとマジックを数名の生徒に渡して、見付けた性質をカードに書いて黒板に掲示してもらう。 o生徒が見付けた性質を、「仮定からすぐに正しいと言えそうなもの」と「そうでないもの」とに区別するように指示する。 o生徒の発表をもとにしてカードを移動し、証明の構想を立てやすくする。 oBE＝CDは、△ADC≡△AEBと△BDC≡△CEBのどちらからでも導けることを確認して、このことを結論とする証明をここでの問題とする。 oしばらくは細かな指示を出さないで、個々の生徒の取組を見守る。その後、必要に応じて次のように問いかける。 ・「3つの合同条件の中で、この問題では使えない条件はどれか」 ・「先に考えたカードの順番を再度確認しよう」 o同じ三角形（△ADC≡△AEBか△BDC≡△CEB）を選択した生徒同士で2人1組になり、1人が証明を発表し、もう1人がその修正などを行う機会を設ける。 o指名された生徒の発表を全員で聞き、不足している部分を生徒が指摘する機会を設ける。	o仮定から簡単に言えることを指摘できる。 （考え方　発言） o証明の構想を立てようとする。 （考え方　観察） o証明を記述する。 （考え方　ノート） o相手の証明が正しいか判断できる。 （考え方　観察）
発展的考察	AB＝ACの二等辺三角形ABCがある。AB、AC上にそれぞれ点D、Eを□となるようにとり、BとE、CとDを結ぶ。このとき、BE＝CDとなる（だろう）。		
	o点D、Eの位置をいろいろな方法で作図してみる。 o考えついた方法を発表する。 o発表された方法の中に似たものを探し、相互の関連を調べる。	o前時の問題との違いを説明する。「AB、AC上にそれぞれとる」という条件はそのままにしておき、BD＝CE以外の方法で点D、Eの位置を考えるように補足する。 o個々の生徒の取組の様子を観察し、必要に応じてほかの生徒の着眼点を示唆する。 o予想したことを発表し合う機会を設ける。ここでは1つ1つを証明することはしない。 o発表された中に似たような方法がないか尋ね、相互の関連を考えるきっかけをつくる。	o点D、Eの位置の決め方をいろいろ考えようとする。 （関・意　観察） o発表されたものの中に似ているものを探そうとする。 （関・意　観察）
	AB＝ACの二等辺三角形ABCがある。点D、Eを□となるようにとり、BとE、CとDを結ぶ。このとき、BE＝CDとなる（だろう）。		
	o例えば次のような位置を考える。 ・AB、ACのA側への延長上 ・AB、ACのB、C側への延長上 ・△ABCの内部 ・△ABCの外部	o生徒自ら「AB、AC上にとる」という条件をはずすことは難しいので、この条件をとり去った問題を教師の方から提示する。そして、2点B、Eの位置は自由に考えてよいことを補足する。	oより一層範囲の広い中で点D、Eの位置を考えようとする。 （関・意　観察）

(4) 学習の実際

問題の把握の場面

最初に、復習として二等辺三角形の定義と性質を尋ねてみた。聞き取れた生徒の声から、定義と性質の区別はついていると判断した。

そこで、右に示す学習プリントを配布した。はじめに作図をし、次に仮定を書き出し、図の中の仮定に当たる部分には「＝」の印を入れるように指示をして、生徒の取組の様子を把握することにした。

学習プリント

AB＝ACの二等辺三角形ABCがあります。AB、AC上にそれぞれ点D、EをBD＝CEとなるようにとり、BとE、CとDを結びます。

(1)図を完成させよう

B――C

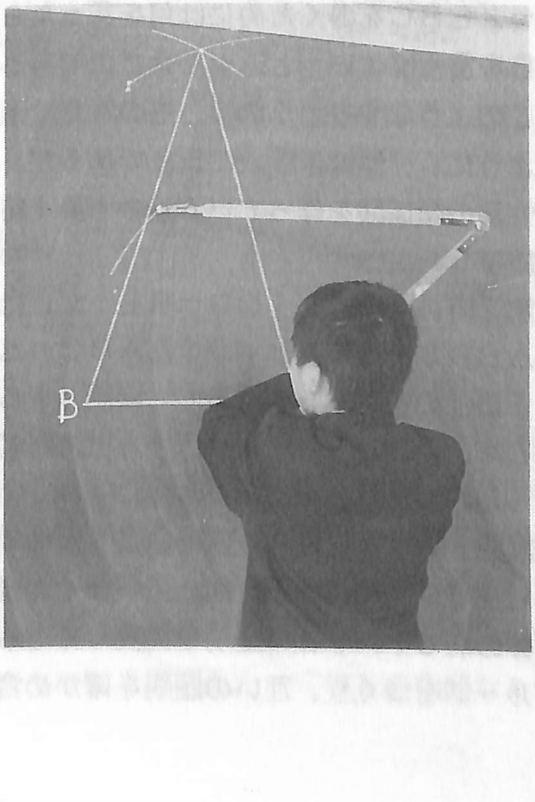
(2)この問題の約束ごと(仮定)は

(3)新たに成り立ちそうなことは

(4)この問題の結論はこれにしよう

ついでに(1)の図の中に「＝」の印を書き入れておこう

24名の生徒のうち、点D、Eの位置を決めるところで４名の生徒が誤ったかき方をしていた。１名の生徒はコンパスの中心を頂点Ａにあてて、「ＡＤ＝ＡＥ」を利用して作図しているし、３名の生徒はコンパスの中心をＢとＣにおいて、「ＢＥ＝ＣＤ」となるように作図しているのである。そこで、後者の中の１人の生徒に黒板に作図するよう指示し（写真）、その手順を全員で追うことで正しい書き方を確認し合った。

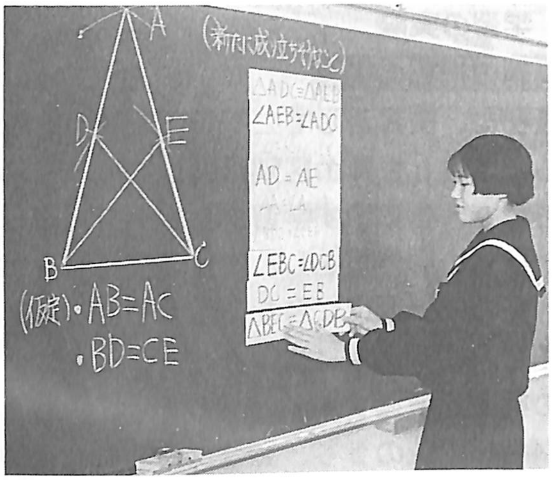


また、学習プリントの仮定を書く欄を見ると、仮定の他に「∠Ｂ＝∠Ｃ、ＡＤ＝ＡＥ」まで書き込んでいる生徒が１名いた。この生徒には「図の中に書いた印をもう一度確認してごらん」と話した。すぐに気付いて訂正していたが、やはり仮定と性質の区別がつかないでいる生徒がいることも事実である。

仮定は２つだけであることを生徒の板書をもとに確認し、「今度は約束していないのに、新たに成り立ちそうなことを書き出してみよう。」と指示した。しばらくは生徒の取組を見守っていたが、中にはなかなか書き出せないでいる生徒がいたので、他の生徒の着眼点（辺・角・合同）を示唆し

たり、具体的な例を挙げたりした。

しばらくしてから、厚紙で作ったカードとマジックを10名の生徒に渡し、見付けた性質の１つをそれぞれ記入してもらい、黒板に貼ってもらった（写真上）。



予想していた９つの性質の他に、「∠Ａ＝∠Ａ」を指摘した生徒が数名いたので、全部で10個の性質になったのである。

問題の解決の場面

生徒が見付けた10個の性質のうち、すぐに正しいと言えそうなものを選ぶように指示した。生徒は「∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ」、「ＡＤ＝ＡＥ」、「∠Ａ＝∠Ａ」を選んだ。

残った７つの性質の関係を探るために、「∠ＡＤＣ＝∠ＡＥＢが正しいことを説明するためには、何を言えばよいか」と尋ねた。挙手する生徒がいなかったため、何人かの生徒を指名して聞いてみると、「∠ＢＤＣ＝∠ＣＥＢを言えばよい」という答えが返ってきた。この生徒は、直線でできた角の大きさが 180° であることを利用しているのである。そこで「それでは、そのことが正しいことを言うためには何を言ったらよいのか」と尋ねると、別の生徒から「∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣが言えればよい」という反応である。今度は三角形の内角の和を利用した考えである。「それなら、∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣを導くためには何を言ったらよいのか」と尋ねたら、「△ＢＤＣ≡△ＣＥＢを言えばよい」と返ってきたのである。

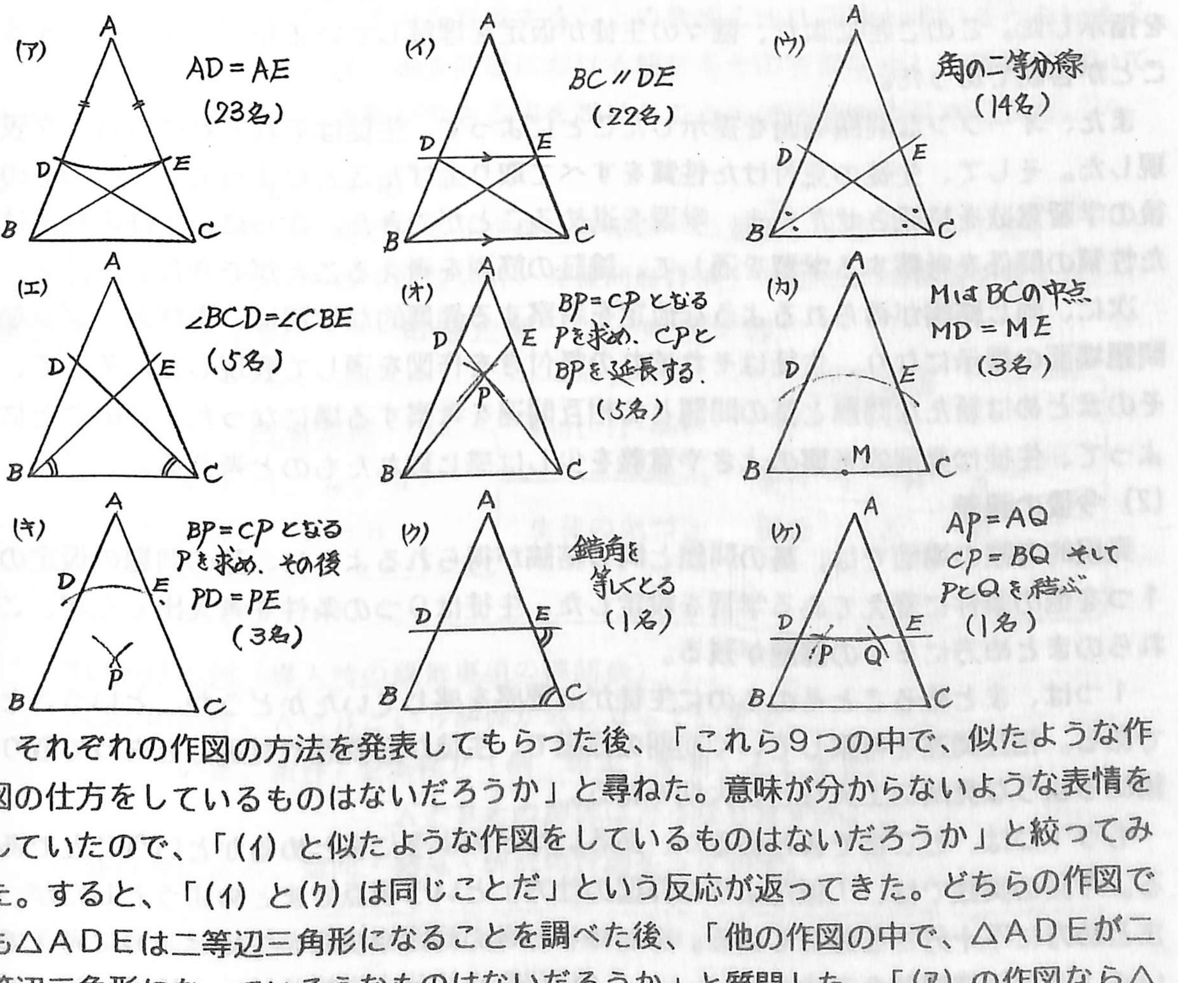
このようなやりとりの後、右の写真で示すように、一部は未完成のままであるが、諸性質の関係図を作っている途中で第１時が終了した。

第２時の前半は、「ＣＤ＝ＢＥ」だけは「△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ」か「△ＡＤＣ≡△ＡＥＢ」のどちらを利用しても証明できることを生徒とともに確認し、一人一人がどちらかの三角形を選択して「ＣＤ＝ＢＥ」を証明することにした。前時に書き留めておいた関係図を参考にしながら証明に取り組む生徒や、関係図を見ないでさっそく証明にとりかかる生徒とまちまちであった。全体の前でそれぞれの証明を発表してもらう前に、同じ三角形を選択した生徒同士でグループをつくり、互いの証明を確かめ合った。

発展的考察の場面

> ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形ＡＢＣがある。ＡＢ、ＡＣ上にそれぞれ点Ｄ、Ｅを
> □となるようにとり、ＢとＥ、ＣとＤを結ぶ。
> このとき、ＢＥ＝ＣＤとなるだろう。

このように書いた学習プリントを配り、前時の学習との違いを補足した。すなわち、「この前の時間は□の中にＢＤ＝ＣＥが記されていたが、今日は点Ｄと点Ｅのとり方そのものを自分で考えて、結果としてＢＥ＝ＣＤとなるようにしてみよう」と問いかけた。しばらくしてから、要領を得ないでいる生徒には、他の生徒が着目しているポイント（角の大きさを等しくする・平行線を引く・長さを等しくするなど）を紹介して、個々の生徒の取組の様子を把握した。生徒はコンパスと定規を使って以下に示すような方法で点Ｄ、Ｅの位置を作図していた。



それぞれの作図の方法を発表してもらった後、「これら９つの中で、似たような作図の仕方をしているものはないだろうか」と尋ねた。意味が分からないような表情をしていたので、「(イ) と似たような作図をしているものはないだろうか」と絞ってみた。すると、「(イ) と(ク) は同じことだ」という反応が返ってきた。どちらの作図でも△ＡＤＥは二等辺三角形になることを調べた後、「他の作図の中で、△ＡＤＥが二等辺三角形になっていそうなものはないだろうか」と質問した。「(ア) の作図なら△

ＡＤＥは二等辺三角形になっている」という声であった。「他にもあるぞ」という声も聞こえてきた。

このようにして、一見異なるように見える点の取り方であっても、調べていくと９つの作図の仕方と基の問題の作図の仕方の中には、似ているものがずいぶんあることを突き止めることができた。

最後に、「点Ｄ、ＥをそれぞれＡＢ、ＡＣ上にとらなくてもよいことにしたら、どんなところが考えられるか」を追求して３時間の学習を終えた。

４　実践のまとめ

(1) 実践の成果

昨年度の調査では、仮定、定義、性質の意味を理解していない生徒が半数を占めているという実態であった。そこで、問題文に適した図を生徒自身がかく場を設定し、コンパスの軌跡に注目すると同時に、図の中の仮定に当たる部分には印をつけることを指示した。このことにより、個々の生徒が仮定を理解しているかどうかを把握することが容易であった。

また、オープンな問題場面を提示したことによって、生徒はそれぞれの気付きを表現した。そして、生徒の見付けた性質をすべて取り上げたことによって、生徒のその後の学習意欲を持続させたまま、学習を進めることができた。さらに、生徒の見付けた性質の関係を考察する学習を通して、論証の筋道を考えることができた。

次に、同じ結論が得られるような仮定を考察する発展的な学習は、再びオープンな問題場面の提示になり、生徒はそれぞれの気付きを作図を通して表現した。そして、そのまとめは新たな問題と基の問題との相互関連を考察する場になった。このことによって、生徒は発展的考察のよさや意義を少しは感じ取れたものと考える。

(2) 今後の課題

発展的考察の場面では、基の問題と同じ結論が得られるように、基の問題の仮定の１つを他の条件に変えてみる学習を設定した。生徒は９つの条件を考え出したが、これらのまとめ方に２つの課題が残る。

１つは、まとめることそのものに生徒が必要感を感じていたかどうか、ということである。相互関連を考察していく初期の段階で、生徒が必要感や見通しをもって取り組めるような発問の工夫などが大切である。

もう１つは、どこまでまとめるか、あるいはどのようにまとめるかということである。今回の実践では、「似たような作図の仕方」という視点でまとめようとしたが、まとめ方に不十分さを感じている。まとめるときの範囲や視点を生徒とともに考えていくような授業展開を工夫したい。　（松代町立松代中学校教諭　　松沢　要一）